

局部充分稀疏的欠定时盲信号源分离

何春兰¹, 万哲²

(1 广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006; 2 江西理工大学 信息工程学院, 江西 赣州 341000)

摘要: 针对欠定时的盲信号分离, 提出了局部充分稀疏条件下估计混叠矩阵 A 的新算法. 该算法不要求源信号所有采样时刻都充分稀疏, 先通过搜索, 把处于同一直线的向量一一归类, 再对所得的类的向量进行处理, 把混叠矩阵 A 确定出来. 仿真实验结果表明算法是有效的.

关键词: 盲信号分离; 稀疏分量分析; 充分稀疏; 欠定

中图分类号: TN911

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2008)04-0061-04

1 问题的提出

盲信号处理作为计算智能学的核心研究内容, 是 20 世纪最后 10 年迅速发展起来的一新研究领域, 是人工神经网络、统计信号处理、信息理论相结合的产物. 已成为一些领域研究与发展的重要课题, 特别在生物医学、医疗图像、语音增强、远程传感、雷达与通信系统、数据采掘等方面均具有突出的作用. 近年来, 对于盲信号处理的研究受到了国内外广泛的重视, 研究越来越广泛和深入, 理论研究得到了很大的发展.

盲信号分离 (Blind source separation, BSS) 是指从若干观测到的混合信号中恢复出无法直接观测的各个原始源信号的过程. 这里的“盲”指源信号是不可观测的、混合系统特征事先未知这两个方面. 在现实生活中, 源信号的数目一般是未知的, 传感器的数目也很有限, 就有可能出现观测信号的数目少于源信号数目的情形, 即欠定时的盲信号分离, 本文讨论的就是欠定时的情况.

盲信号分离的数学模型表示为

$$X = AS + V \quad (1)$$

其中 $X = [x(1), x(2), \dots, x(N)] \in R^{m \times N}$ 是 m 维混叠信号, 也即为观测信号; N 是样本采样数; $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in R^{m \times n}$ 是混叠矩阵; $S = [s(1), s(2), \dots, s(N)] \in R^{n \times N}$ 是 n 维未知源信号; $V \in R^{m \times N}$ 是高斯噪声信号矩阵. 当噪声可以忽略不计, 盲信号分离的数学模型可以简化为

$$X = AS \quad (2)$$

以列向量的形式表示, 即为

$$x^t = \sum_{j=1}^n a_j s_j^t \quad (3)$$

其中 $x^t (t=1, 2, \dots, N)$ 是矩阵观测信号矩阵 X 的列

向量; $a_j (j=1, 2, \dots, n)$ 是混叠矩阵 A 的列向量; $s^t = (s_1^t, s_2^t, \dots, s_n^t)^T$ 是源信号矩阵 S 的列向量, $s_j^t (j=1, 2, \dots, n)$ 是列向量 s^t 中第 j 个元素.

本文要讨论的就是 $m < n$ 时的欠定情况. 针对这个问题, 大多是利用信号在某种情况下所具有的稀疏性, 对信号进行稀疏分解, 也就是稀疏分量分析 (sparse component analysis, SCA) 问题. 所谓稀疏信号, 指的是源信号在绝大多数时刻的采样点为零或者接近于零, 即源信号在某个采样时刻只有一个源信号取值较大起主要的作用, 其它源信号都很小或者为零. 此时式 (3) 可表示为 $x^t = a_j s_j^t$. 由此可以看出 x^t 与 a_j 在同一条直线上, 因此可以通过搜索把 $x^t (t=1, 2, \dots, N)$ 进行聚类, 从而得到混叠矩阵 A 的估计.

SCA 现在已成为盲信号分离中的又一个研究热点, Belouchrani^[1] 针对离散源信号提出“最大后验概率”的方法; 何昭水^[2-3] 提出了 K-EVD 等算法; 谢胜利^[4] 随后提出了基于法向量的平面聚类法; 最近肖明^[5] 又提出时域检索平均法, 以上的方法都取得了良好的盲分离效果. 特别是 Georgiev^[6] 提出了一种新的解决方法, 它是局部充分稀疏表示的判定条件, 即定理 1. 但目前与 Georgiev 的理论相对应的算法还很不完善, 本文提出的算法能有效地实现 Georgiev 的理论.

2 混叠矩阵 A 的确定

定理 1 (局部充分稀疏情形下的判定条件): 假设源信号的数目是未知的并具有以下两个条件:

1) 对任意指数 $i=1, \dots, n$, S 中至少有两列 $S(:, j_1)$ 和 $S(:, j_2)$ 仅仅在位置 i 有非零元素 (即每个信源都至少唯一地出现两次);

2) 对任意 $c \in R$, $k = 1, \dots, N$ 和 $q = 1, \dots, N$ 且 $k \neq q$, 若 $X(:, k) \neq cX(:, q)$, 则 $S(:, k)$ 有多于一个的非零元素 (即若 X 中的第 k 和 q 列不成比例, 则 $S(:, k)$ 有多于一个的非零元素).

那么源信号的个数和矩阵 A 能唯一地确定 (除去顺序和比例的差别).

证明 把 X 中所有非零的、归一化的列向量聚类, 使得每一类包含的向量不同. 根据条件 1) 和 2), 说明包含多于一个元素的类的数目就是源信号的数目, 且每一类将表示 A 的一个单位化的列.

下面通过一个简单的例子来说明这个定理的证明.

对于数学模型 $X = AS$, 假设 $X \in R^{3 \times 5}$, $A \in R^{3 \times 4}$,

$S \in R^{4 \times 5}$,

即

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

根据条件 1), 对指数 $i = 1$ 假设 S 中的第 2 列和第 3 列仅仅在第 1 个元素是非零的, 即在第 2 和第 3 列除了 s_{12} 和 s_{13} 不为零, 其它元素都为零, 那么可得到

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} s_{12}, \quad \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} s_{13}. \quad (5)$$

把式 (4) 以列向量的形式列出来, 即为

$$\begin{bmatrix} x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1) & a(2) & a(3) & a(4) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s(1) & s(2) & s(3) & s(4) & s(5) \end{bmatrix},$$

其中 $x(i)$ ($i = 1, \dots, 5$), a_j ($j = 1, \dots, 4$), $s(l)$ ($l = 1, \dots, 5$) 分别为矩阵 X, A, S 的列向量.

于是式 (5) 可得

$$x(2) = a_1 s(2), \quad x(3) = a_1 s(3). \quad (6)$$

归一化之后, $x(2)$ 和 $x(3)$ 都与 a_1 在同一条直线上, 所以 a_1 可由 $x(2)$ 和 $x(3)$ 得到估计值, $x(2)$ 和 $x(3)$ 属于同一类. 以此类推, 若满足条件 1), 当 $i = 2$ 时, 则可得到 a_2 的一个估计; $i = 3$ 时, 则可得到 a_3 的一个估计; $i = 4$ 时, 则可得到 a_4 的一个估计. 根据条件 1)、2), 每一个类中都至少有两个元素, 由以上的例子可知, 包含多于一个元素的类的数目就是源信号 n 的数目, 且每一类将表示 A 的一个单位化的列, 定理是成立的.

因此, 只要把观测信号矩阵 X 中处于同一直线的列归为一类, 且类中的数目大于 1, 那么它就是混叠矩阵 A 中一个列向量的估计.

下面给出局部充分稀疏的情况下确定混叠矩阵 A 的算法.

1) 除掉 X 中所有为零的列, 得到矩阵 $X_1 \in R^{m \times T}$;

2) 归一化 X_1 中所有列 $x(t)$, $t = 1, \dots, T$, 即

$$y(t) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|};$$

若 $y(t)$ 的第一个元素为负的, 则乘以 -1 得到 $-y(t)$, 这就得到新的矩阵 $Y = [y(1), \dots, y(T)]$, 并设 $\varepsilon > 0$

3) 任选 $i \in [1, m]$, 对行向量 y_i 的 T 个元素按从小到大的顺序排列起来, 即 y_i 中第 k 大元素所在的列就处于第 k 列; 若有元素相等, 则按它们原来的先后顺序进行排列, 得到新的矩阵 Y_1 , $Y_1 = [y(1), \dots, y(T)]$;

4) 利用 $dt = y(t) - y(t+1)$ 对矩阵 Y_1 进行搜索 ($t = 1, \dots, T-1$), 当 $dt < \varepsilon$ 时, 令 $dt = 0$ 得到矩阵 $D = [d_1, \dots, d_{T-1}]$, 矩阵 D 中有很多为零的列. 如果当 $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1$, 且 $t_1 - t_0 + 1 \geq 2$ 有 $dt = 0$ 而当 $t = t_0 - 1, t_0 + 1$ 时 $dt \neq 0$ 则当 $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 + 1$ 时, $y(t)$ 为同一类, 然后再从下一时刻进行搜索, 以此类推, 就可以把 $y(t)$, $t = 1, \dots, T$ 分成 n 个类 $G_1, \dots, G_n$;

5) 若类 G_i 中包含 r_i ($i = 1, \dots, n$) 个元素, 则由

$$a_i = \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} y(j)$$

得到 a_i 的一个估计, 从而可以得到 A 的一个估计.

步骤 4) 中利用 $dt = y(t) - y(t+1)$ 对矩阵 Y_1 进行搜索, 目的是为了检索矩阵 Y_1 中位于同一直线的列向量, 从而把位于同一直线的、数目多于 1 的列向量都归为一类, 符合了定理的要求, 因此该算法是可行的.

定义 1 在实时线性混叠系统中, 如果在给定的时间区间 $[t_1, t_2]$ 上, 仅仅有一个源信号不为零起主要的作用, 其它的源信号都为零或者接近于零, 那么区间 $[t_1, t_2]$ 称为单源区间.

定理 2 如果每个源信号具有稀疏持续性, 即在很短的一个时间 $[t_1, t_2]$ 内, 满足单源区间的定义, 且在 $[t_1, t_2]$ 上的采样至少为 2, 其它不满足稀疏持续性的时刻, 源信号有多于一个的非零元, 那么在不考虑尺度和比例变化的情况下, 混叠矩阵 A 能唯一地确定.

证明: 因为每个源信号都具有稀疏持续性, 在很短的一个时间 $[t_1, t_2]$ 内, 仅仅有一个源信号不为零, 且至少有连续两个采样时刻具有这个性质, 这就意味

着满足定理 1 的条件. 再由定理 1 可知, 在不考虑尺度和比例变化的情况下, 混叠矩阵 $\mathbf{A}$ 能唯一地确定.

推论 1 如果区间 $[t_b, t_2]$ 是单源区间, 则 $\forall t' \in [t_b, t_2], \mathbf{x}^i$ 都几乎位于同一条直线上.

证明: 因为 $[t_b, t_2]$ 是单源区间, 在区间 $[t_b, t_2]$ 上仅有一个源信号不为零, 那么根据定理 1 的证明及推导可知, $\forall t' \in [t_b, t_2], \mathbf{x}^i$ 都几乎位于同一条直线上.

利用推论 1 的性质, 定理 2 在确定混叠矩阵 $\mathbf{A}$ 的过程中, 首先利用定理 1 中算法的第 1、2、3 步对观测信号进行预处理, 然后根据第 4 步中 $d_t = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t+1) (t = 1, \dots, T-1)$, 把观测矩阵 $\mathbf{X}$ 中处于单源区间的列一一找出来. 进而从每一个单源区间中提取一列构成一个新的矩阵 $\mathbf{Y}_2 = [\tilde{\mathbf{y}}(1), \dots, \tilde{\mathbf{y}}(T_1)]$, T_1 是矩阵 $\mathbf{X}$ 中单源区间的总数. 再次利用 $d_t = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t+1) (t = 1, \dots, T_1-1)$ 把矩阵 $\mathbf{Y}_2$ 中处于同一条直线的列都一一归类, 从而可以把单源区间归为 n 个类 $G_1, \dots, G_{n_2}$. 利用定理 1 中的算法第 5 步就可以得到 $\mathbf{A}$ 的一个估计.

3 源信号的恢复

对于欠定的盲信号分离, 即使混叠矩阵 $\mathbf{A}$ 是已知的, 源信号的分解也不唯一. 目前一般采用“要求 l_1 范数最小”来作分解, l_1 范数可写成如下的优化问题:

$$\min \sum_{j=1}^n |s_j^t|, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j^t = x^t.$$

如果假设所有源信号在每个时刻都至多有 q 个不为零的、起主要作用的源信号, 其它的源信号都接近于零或者为零, 那么源信号的恢复可简化为以下的优化问题:

$$\min \sum_{j=1}^n |s_j^t|, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^q a_{ik} s_k^t = x^t.$$

源信号如果具有稀疏性, 那么对源信号再加上相互独立的限制条件, 这样能更加有效地恢复出源信号, 具体的实现有待进一步的研究.

4 仿真实验

为了说明本文算法在欠定情况下的可行性, 下面通过两个实验对估计的混叠矩阵和原始的混叠矩阵进行比较. 实验一: 考虑的是构造的 3 个充分稀疏的源信号和 2 个混合观测信号 (即 $n=3, m=2$) 的情况. 实验二: 考虑的是 4 个源信号中只包含 1% 的充分稀疏信号和 3 个混合观测信号的情况 (即 $n=4, m=3$).

实验一: 这个实验构造了包含 20 000 个采样点的 3 个源信号, 每个采样时刻都满足充分稀疏的条件 (如图 1), 是只有 2 个混合观测信号 (如图 2) 的情况

随机产生一个 2×3 阶的混叠矩阵 $\mathbf{A}$, 把它的第一列单位化后得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5384 & 0.7721 & -0.9488 \\ -0.8427 & 0.6355 & 0.3158 \end{bmatrix}.$$

采用本文提出的算法, 得到估计的混叠矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 为

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.9488 & 0.5384 & -0.7721 \\ -0.3158 & 0.8427 & 0.6355 \end{bmatrix}.$$

把估计的混叠矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ 与原混叠矩阵 $\mathbf{A}$ 的各列作比较, 可见该算法能成功地恢复出混叠矩阵 $\mathbf{A}$ (除去存在的符号和顺序的差异).

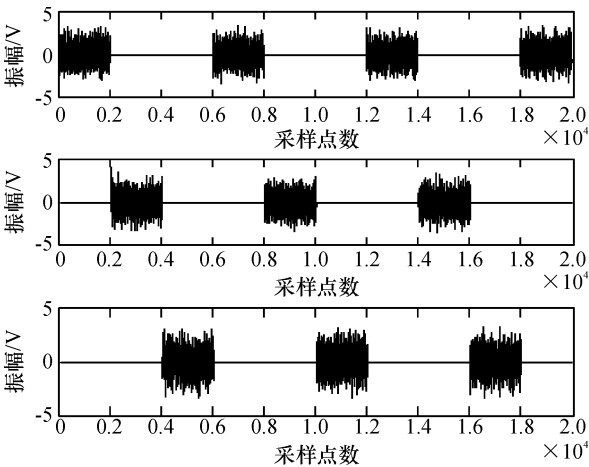


图 1 源信号 1

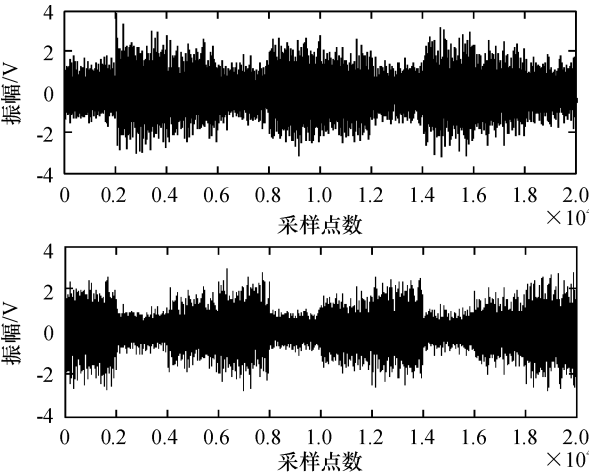


图 2 观测信号 1

实验二: 考虑的是 4 个语音的源信号 (如图 3), 所有的采样点 (20 000 个) 中只有 1% 的采样时刻满足充分稀疏的条件, 是只有 3 个混合观测信号 (如图 4) 的欠定情况.

随机产生一个 3×4 阶的混叠矩阵 $\mathbf{A}$, 把它的第一列单位化后得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.7542 & 0.9488 & -0.4545 & 0.1818 \\ 0.5392 & -0.3154 & 0.5874 & -0.4536 \\ -0.3746 & -0.0180 & 0.6696 & 0.8725 \end{bmatrix}.$$

采用本文的算法, 得到估计的混叠矩阵 $\hat{A}$ 为

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.4545 & 0.9488 & -0.7542 & 0.1818 \\ 0.5874 & -0.3154 & 0.5392 & -0.4536 \\ -0.6696 & -0.0180 & 0.3746 & 0.8729 \end{bmatrix}.$$

把估计的混叠矩阵 $\hat{A}$ 与原混叠矩阵 A 的各列作比较, 可见该算法仍能成功地恢复出混叠矩阵 A (除去存在的符号和顺序的差异).

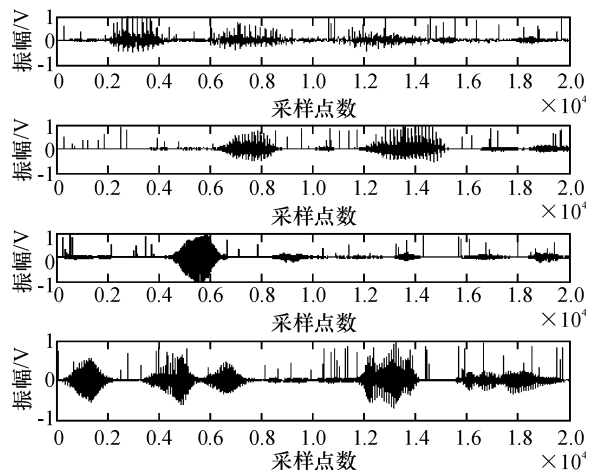


图 3 源信号 2

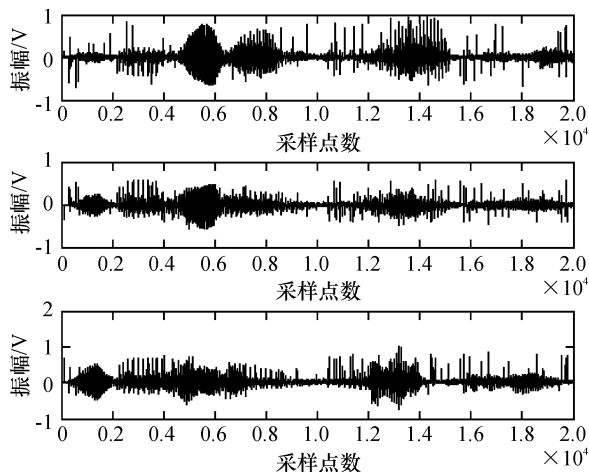


图 4 观测信号 2

5 结论

本文提出一种欠定情况下估计混叠矩阵 A 的新算法. 它不仅解决了源信号充分稀疏时的情况, 对源信号只有极少数采样时刻满足充分稀疏的情况也同样适合, 仿真实验结果表明该算法是有效的. 同时根据定理 1 推出了定理 2 及其推论. 但是, 目前源信号的恢复仍然是盲信号分离中的一个难题, 下一步的研究将从源信号的稀疏性和独立性相结合出发, 寻找一种恢复源信号的有效算法.

参考文献:

- [1] Bebuchrani A, Cardoso J F. Maximum likelihood source separation for discrete sources[C]// Proceedings of EUSIPCO-94 - 7th European Signal Processing Conference Edinburgh UK: [s.n.], 1994: 2768-771.
- [2] 何昭水, 谢胜利, 傅予力. 稀疏表示与病态混叠盲分离[J]. 中国科学 E 辑 信息科学, 2006, 36(8): 864-879.
- [3] He Z S, Cichocki A. K-EVD Clustering and its Application in Sparse Component Analysis[C]// 6th International Conference on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, Charleston [s.n.], 2006: 90-97.
- [4] 谢胜利, 谭北海, 傅予力. 基于平面聚类算法的欠定混叠盲信号分离[J]. 自然科学进展, 2007, 17(6): 795-800.
- [5] 肖明, 谢胜利, 傅予力. 欠定情形下语音信号盲分离的时域检索平均法[J]. 中国科学 E 辑 信息科学, 2007, 37(12): 1564-1572.
- [6] Georgiev P, Theis F, Cichocki A. Sparse component analysis and blind source separation of underdetermined mixtures[J]. IEEE Transactions of Neural Networks, 2005, 16(4): 992-996.
- [7] Li Y, Andzej C, Amari S. Analysis of sparse representation and blind source separation[J]. Neural Comput, 2004, 16(6): 1193-1234.

Underdetermined Blind Source Separation Based on Locally Sparse Representations

He Chun-lan¹, Wan Zhe²

(1 Faculty of Applied Mathematics Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006 China)

2 Faculty of Information Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000)

Abstract It proposes a new algorithm of locally sparse blind source separation for estimating the mixed matrix A . This method doesn't require all the samples of the sources are strictly sparse. Firstly all the vectors in the same line were searched for and classified. And then the mixed matrix A determined. The simulation illustrates the effectiveness of this algorithm.

Key words blind source separation; sparse; strictly sparse; underdetermined